

제13장 복소수와 복소함수 및 등각사상

13.1 복소수와 복소평면

어떤 실수에 대하여 만족되지 않는 방정식. 예를들면

$$x^2 = -1 \quad \text{또는} \quad x^2 - 10x + 40 = 0$$

→ 복소수가 고안되었다.

2차 방정식 근을 찾는 방법

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad (1)$$

2차 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근을 구하는 공식

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

• (2)에 (1)을 대입하면

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pm 1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \end{aligned}$$

$x = 3$, $x = -2$ 가 두 근이다

$2x^2 + 2x + 5 = 0$ 에 (2) 공식을 적용하면

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{4}$$

→ 음수의 제곱근을 알아야 하는 문제점이 생긴다.

$b^2 - 4ac < 0$ 의 상황을 해결하려면 복소수이론이 필요하다.

복소수를 도입하기 위해 다음과 같은 성질이 있는 i 를 생각하자.

$$i^2 = -1$$

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36 \times (-1)} = \sqrt{36 \times i^2} = 6i$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{4} \\&= \frac{-2 \pm 6i}{4} \\&= \frac{-1 \pm 3i}{2}\end{aligned}$$

두 개의 근, $x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ $x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

→ 이러한 숫자를 **복소수(Complex numbers)**

→ 복소수는 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)의 두 부분으로 되어있다.

페이서(Phasor)

전기공학자: 교류전원이 있는 회로해석을 어떻게 다루는가?

전원은 사인파 형태이며, 그 회로 안에 전류와 전압도 사인파형이다.

예를 들면,

$$v(t) = V \cos(\omega t + \phi) = V \cos(2\pi f t + \phi) \quad (1)$$

V : Peak 값 ω : 각주파수

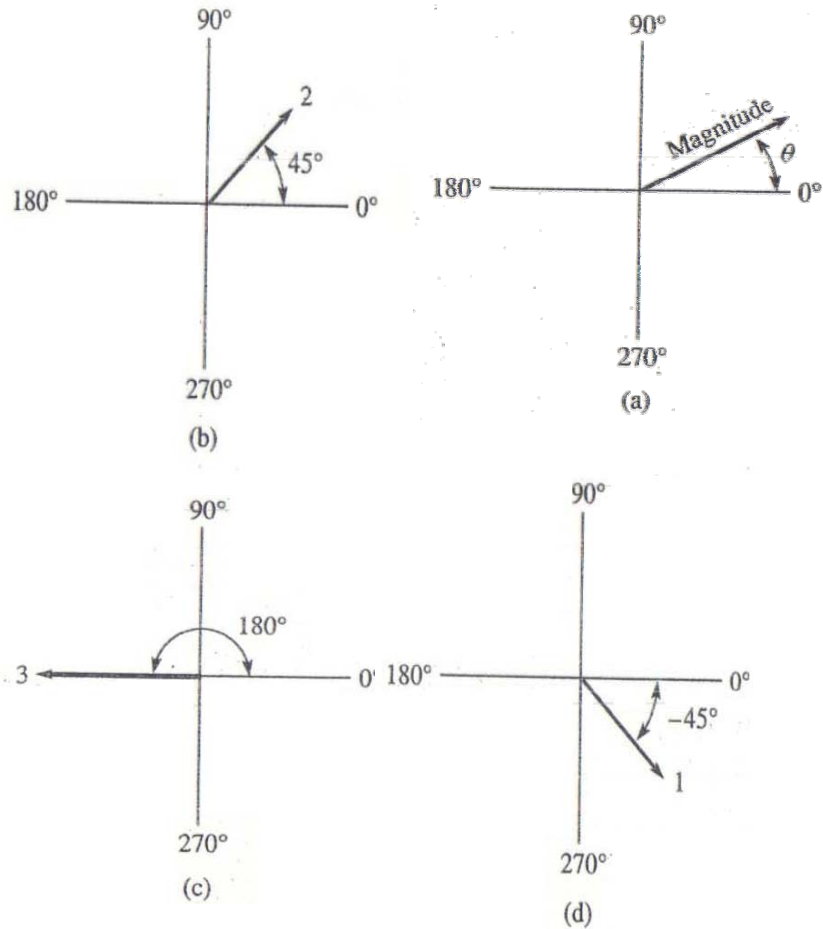
f : 주파수 ϕ : 기준파형에 대한 위상

이러한 표현을 시간영역표현(time domain representation)이라고 한다.

회로 안의 각 전압과 전류: 전원과 같은 주파수를 갖는다.

→크기와 위상은 전원과 다르다.

4-a



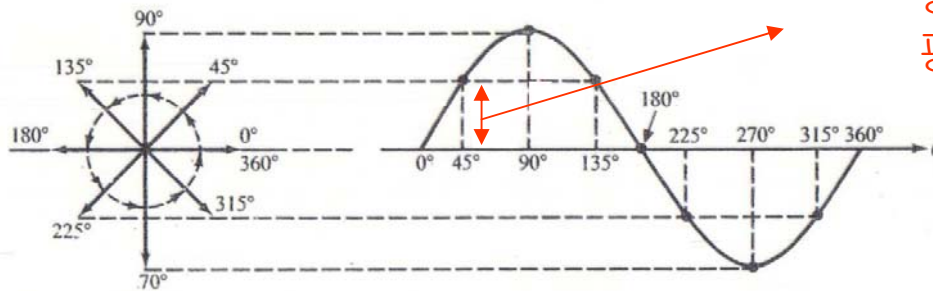
페이저 : 방향과 크기를 모두 갖는 양을
그림으로 제공한다.

(c) 페이저의 크기가 3. 위상각이 180°

(d) 페이저의 크기 1. 위상각 315°(-45°)

그림 A 페이저의 예

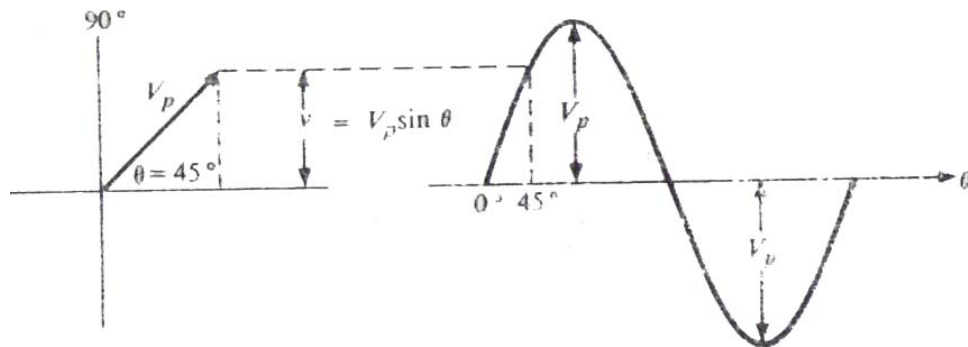
정현파의 페이지저 표현



정현파의 순시값은 페이지저의 끝(정상)에서 수평축까지의 수직거리와 같다.

페이지저 표현으로 360° 를 정현파의 완전한 1Cycle로 나타낼 수 있다.

그림 B. 정현파는 회전 페이지저의 운동으로 표시된다.

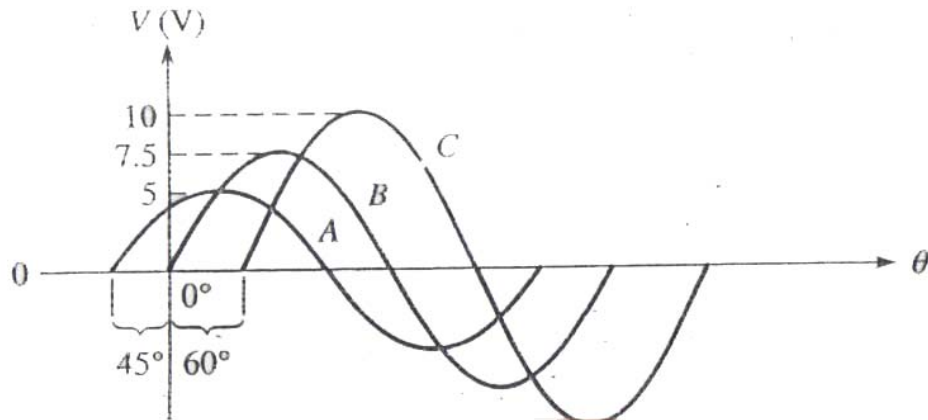


45° 각 위치에 있는 전압 페이지저와 정현파에 대응된 위치를 보여준다.

정현파의 순시값은 페이지저의 길이와 위치에 모두 관계된다.

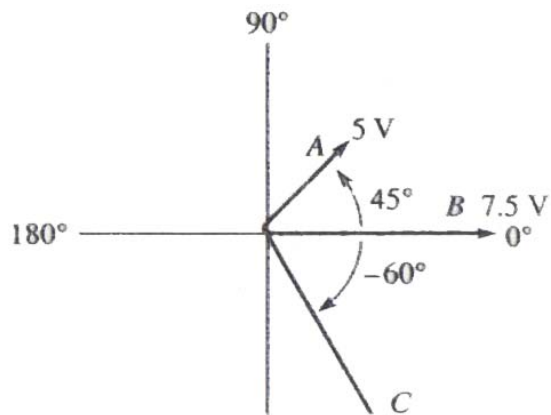
그림 C. 정현파 공식의 직각 삼각형 유도

4-b



정현파 A는 B보다 45° 앞선다.

그림 D. 페이지 에 대한 예



이러한 회로를 해석하기 위해서는 그 파형의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 필요하다.

→ 시간영역 표현을 사용하면 계산이 어렵게 된다.

또 하나의 접근법: Phasor를 사용한다.

- ① 페이저는 크기와 각도의 두 부분으로 되어있다.
- ② 페이저는 극형식의 복소수로 표현될 수 있다.
- ③ 복소수의 크기는 페이저의 크기에 해당하고 따라서 파형의 진폭에 해당된다.
- ④ 복소수의 편각 ϕ 는 페이저의 각도에 해당하고 파형의 위상각도에 해당한다.

그림1은 식(1)의 사인파형의 페이저이다.

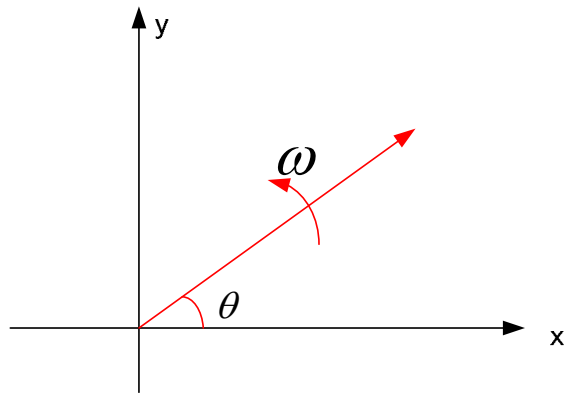


그림1. $\tilde{V} = V \angle \phi$ 의 예

여기서 ω 는 각 주파수이며 그에 따라
페이저가 회전한다.

복소수 $V \angle \phi$ 에 해당하는 페이저 : $\tilde{V}$

전류 $i(t) = I \cos(\omega t + \phi)$ 페이저 표현

→ $\tilde{I}$ 가 되고 복소수 표현은 $I \angle \phi$

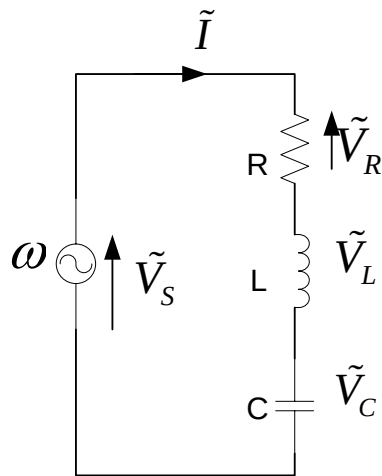


그림5. RLC 직렬 회로

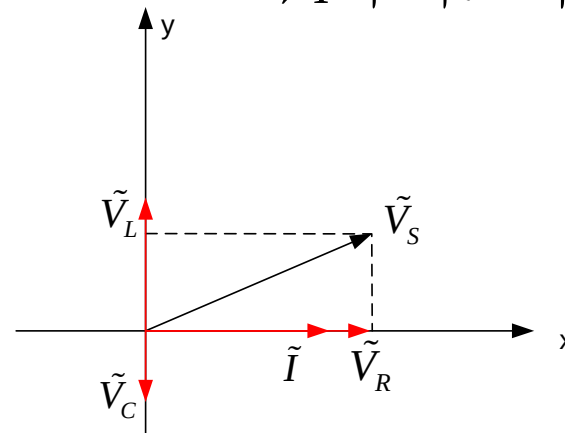


그림6. 그림5의 페이저 도형

그림 5의 각 회로 요소의 페이지저를 조사하자.
옴의 법칙의 페이지저 표현이 필요하다.

$$\tilde{V} = \tilde{I}Z \quad (2)$$

$\tilde{V}$: 전압페이지저, $\tilde{I}$: 전류페이지저

Z : 임피던스 (복소수가 될 수도 있다.)

⇒ 식에서 페이지저와 복소수가 같이 있다.

⇒ 페이지저는 복소수로 취급한다.

1. 저항 (Resister)

$$V = RI$$

실험에서 저항에 교류전압이 가해지면 전류의 위상은 교류전압과 같다.

두 파형 크기의 비는 저항 R과 같다.

따라서 $\tilde{I} = I\angle 0$ 과 $Z = R\angle 0$ 이 주어지면 식 (2)에 의해

$\tilde{V} = IR\angle 0$ 이다.

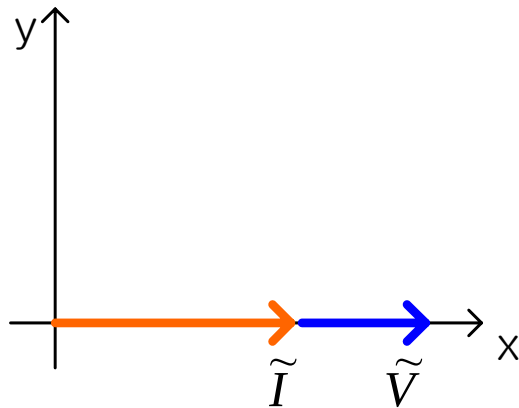


그림 3. 저항의 페이저 도형

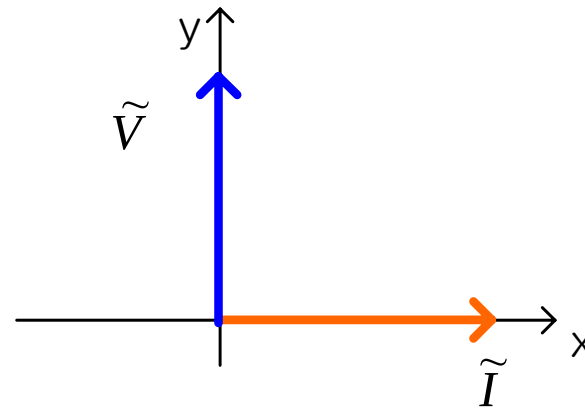


그림 4. 인덕터의 페이저 도형

2. 인덕터 (Inductor) $V = L \frac{dI}{dt}$

전압이 전류에 비해서 위상이 $\frac{\pi}{2}$ 이 앞선다.

임피던스 크기는 ωL 로 주어진다.

따라서, $\tilde{I} = I \angle 0$, $Z = \omega L \angle \frac{\pi}{2}$ 가 주어질 경우

식 (2)에 의해서 $\tilde{V} = I \omega L \angle \frac{\pi}{2}$ 가 된다.

인덕터 Z의 다른 표현방법은

$$\begin{aligned} Z &= \omega L e^{\frac{j\pi}{2}} = \omega L \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= j\omega L \end{aligned}$$

⇒ 이것이 페이저에서 덧셈과 뺄셈을 할 경우 편리하다.

3. 콘덴서

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt$$

콘덴서의 경우 전압이 전류에 비해 위상이 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 느리다.

임피던스의 크기는 $\frac{1}{\omega C}$ 로 주어진다.

(2)에 의해 $\tilde{V}_C = \frac{I}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2}$ 이다.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{e^{-\frac{j\pi}{2}}}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \left(\cos \frac{\pi}{2} - j \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C} \end{aligned}$$

그림 에서 키리히호프 전류 법칙에 의해

각 소자에는 같은 전류 $\tilde{I}$ 가 흐른다.

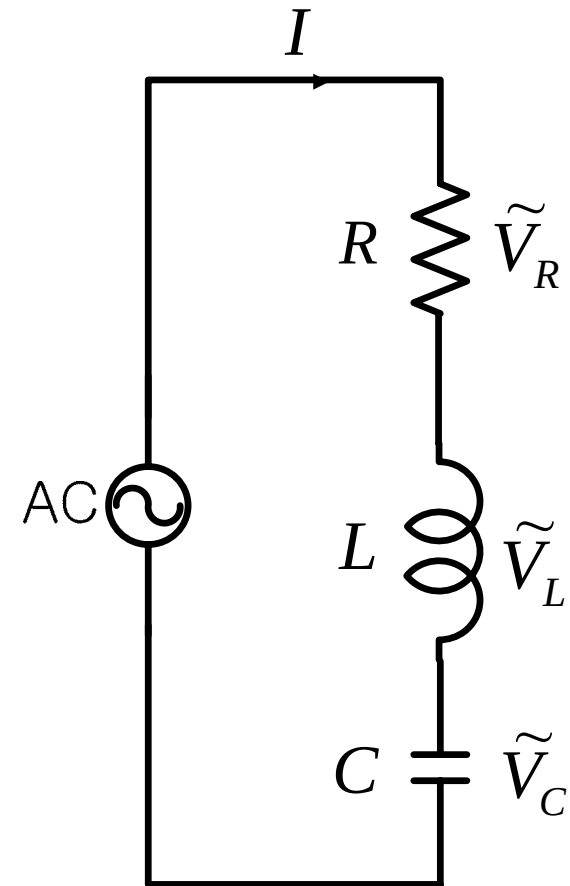
키르히호프 전압법칙에 의해

$$\tilde{V}_s = \tilde{V}_R + \tilde{V}_C + \tilde{V}_L$$

그림 에서 $|\tilde{V}_L| > |\tilde{V}_C|$ 이고,
 $\tilde{I}$ 는 기준 페이지저이다.

$$\tilde{V}_R = \tilde{I}R \angle 0 = \tilde{I}R$$

$$\tilde{V}_L = \tilde{I} \omega L \angle \frac{\pi}{2} = \tilde{I} j \omega L$$



$$\tilde{V}_C = \frac{\tilde{I}}{\omega C} \angle \frac{\pi}{-2} = \frac{\tilde{I}}{j\omega C}$$

이므로

$$\begin{aligned}\tilde{V}_s &= \tilde{V}_R + \tilde{V}_L + \tilde{V}_C \\ &= \tilde{I}R + \tilde{I}j\omega L + \frac{\tilde{I}}{j\omega C} \\ &= \bar{I} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)\end{aligned}$$

$$\text{임피던스 } Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

회로의 임피던스의 크기가 최소가 되는 주파수를 계산하면

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \\ &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ |Z| &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \end{aligned}$$

ω 가 변하므로 다음의 경우 $|Z|$ 가 최소화된다.

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

이 최소값은 $|Z| = R$

그림 5에서 $\tilde{V}_L$ 과 $\tilde{V}_C$ 가 같은 크기 일 때 최소 인덕턴스가 생긴다.

그 경우 $\tilde{V}_S$ 는 허수 성분을 갖지 않는다.

이 때의 주파수를 공진주파수 (Resonant frequency) 라고 한다.

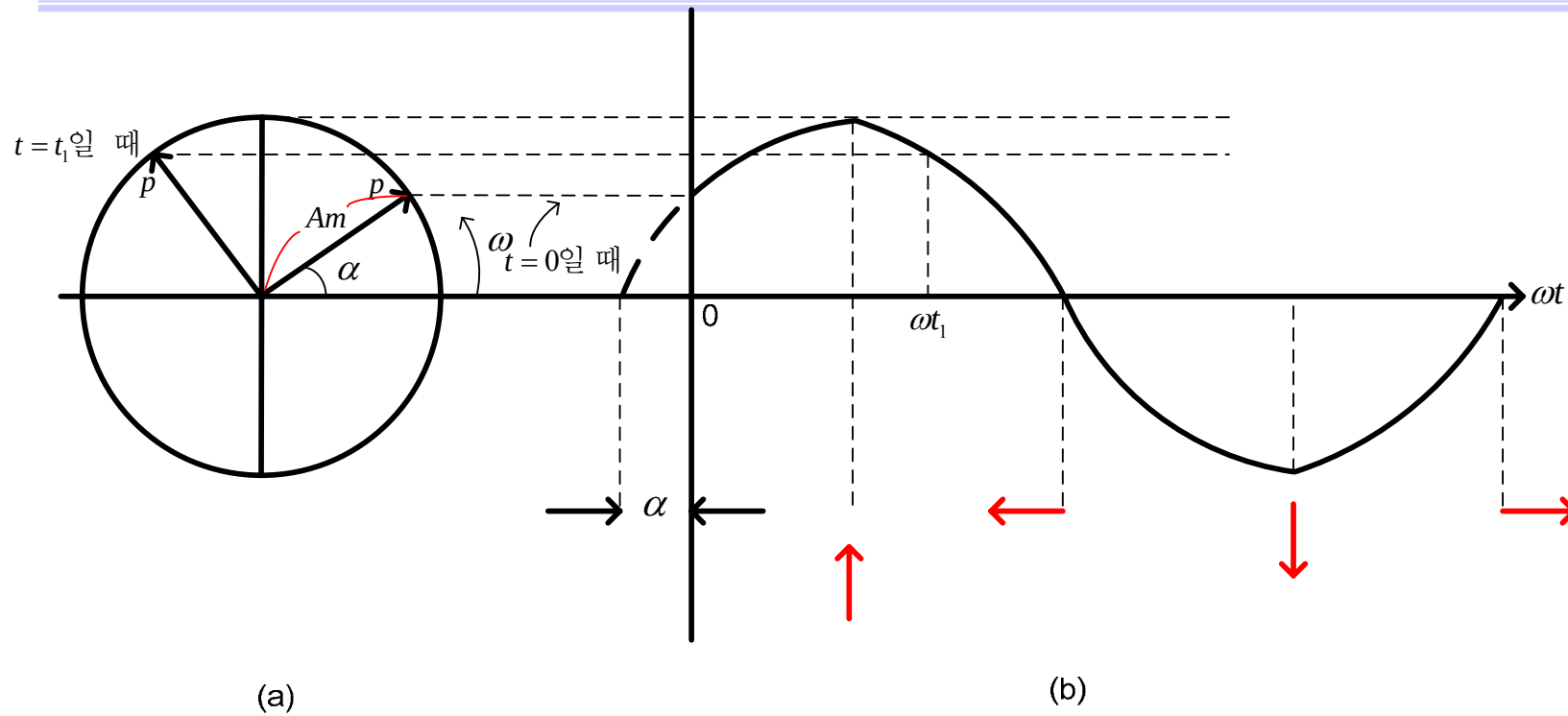


그림 7. 회전선분과 정현파

길이가 A_m 인 선분 OP 가 평면상에서 원점 0의 주위를 일정한 각속도 $\omega \text{ rad/sec}$ 로 반 시계 방향으로 회전한다.
반시계 반향으로 α 각을 이루는 순간을 시간의 원점으로 택한다고 하자.

t_1 초 후에 선분 OP 는 $\omega t_1 [rad]$ 만큼 회전하여 수평축과는 $(\omega t_1 + \alpha) rad$ 의 각을 이룬다.

이때 OP 의 수직축상의 투영 OP 는

$$\overline{OP} = A_m \sin(\omega t + \alpha)$$

- 최대치 A_m 위상각 α 인 정현파 $t = t_1$ 에서 순시치와 같다.

→ 이런 의미에서 회전선분은 하나의 정현파를 대표한다.

(b)는 회전성분이 대표하는 정현파의 순시치 곡선을 나타낸다.

선분이 1회전하면 이에 따라서라 정현파는 1cycle을 그린다.

①은 길이가 A_m 이고, $t = 0$ 에서 정방향의 수평축과 이루는 각이 α 이다.
일정한 각속도 ω 로서 반시계 방향으로 회전하는 하나의 선분으로 표시된다.

정의에 의하여 복소수(complex number) Z 는 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 이며 $Z = x + yi$ 라고 쓴다.

혹은 $Z = (x, y)$

- 제 1 부 복소해석

복소함수를 이용하면, 실함수를 이용했을 때보다 계산을-특히 적분계산을-간단히 할 수 있고, 열전달, 유체역학, 전자기학 등 공학 전반에 등장하는 복잡한 함수들을 보다 깊게 이해할 수 있다.

복소수는 새로운 수의 체계이므로, 복소해석에서는 복소공간에서의 관계를 식으로 나타낸 복소함수, 국부적인 변화(또는 시간적인 변화)를 나타내는 복소함수의 미분, 변화의 총계를 나타내는 복소함수의 적분에 대해 배운다.

1. 복소함수

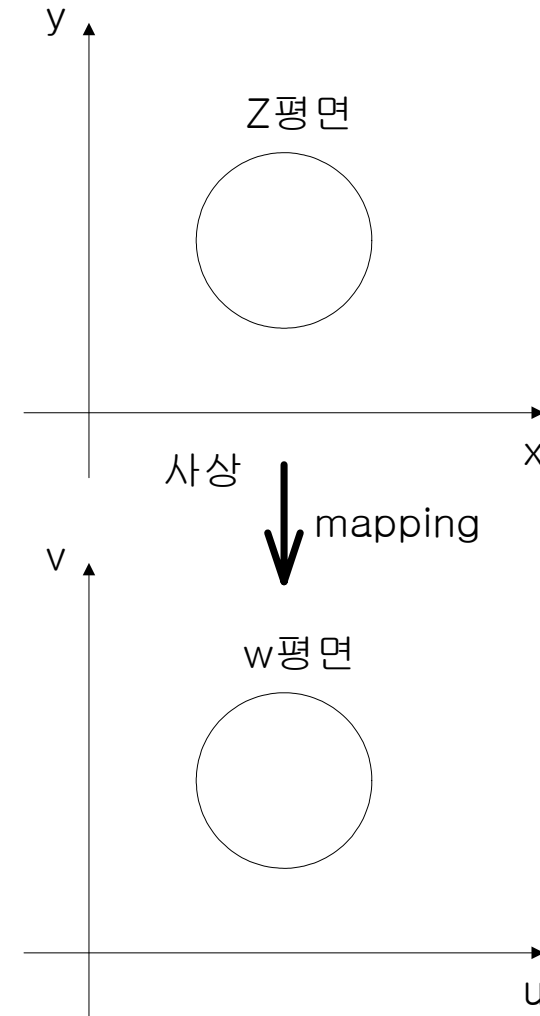
복소수란 $z = x + yi$

(x, y 는 실수, i 는 허수 $\sqrt{-1}$)

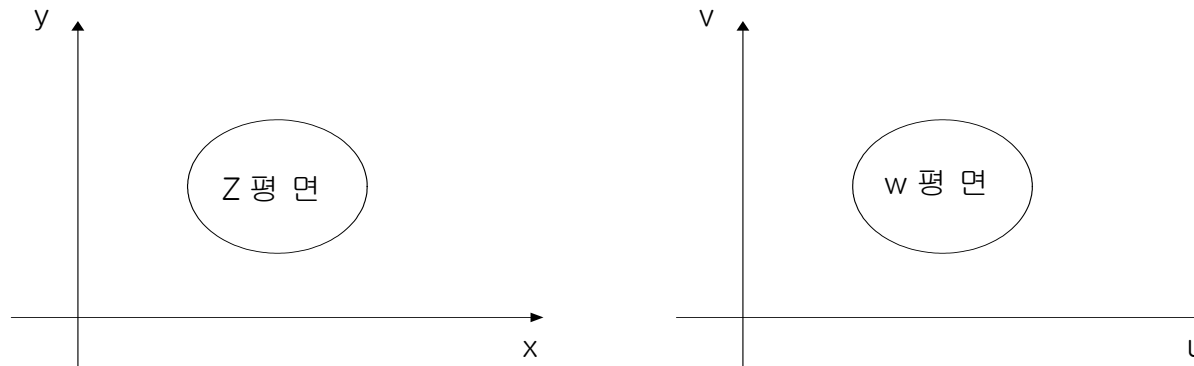
와 같이 실수와 허수로 이루어진 수로
실수를 확장한 가장 넓은 범위의 수이다.

복소함수란 복소수를 변수로 갖는 함수
로, 예를 들면

$$w = f(z) = z^2 + 3z = u(x, y) + iv(x, y)$$



복소함수의 그래프를 그리려면 2장의 평면이 필요한데,



그 이유는, 변수인 복소수 자신이 2개의 변수 x, y 를 가지고 있고, 또한 복소함수도 u, v 개의 변수를 가지고 있기 때문, 즉 한 평면상에 모두 그릴 수 없기 때문이다.

복소함수 중에서 가장 많이 쓰이는 것은 복소지수함수

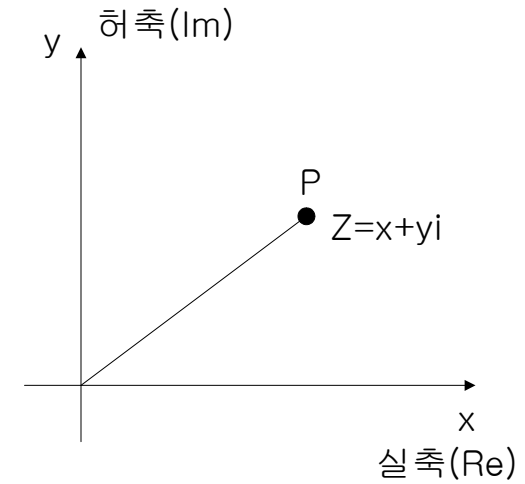
$$e^z = e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x e^{i\theta}$$

- 복소수의 성질

$$z = x + yi$$

$$x: \text{실수}, y: \text{실수} \quad i = \sqrt{-1}$$

복소수는 복소평면에 한 점으로 나타낼 수 있다.
즉, 복소수는 화살표만 없는 2차원 벡터와 유사

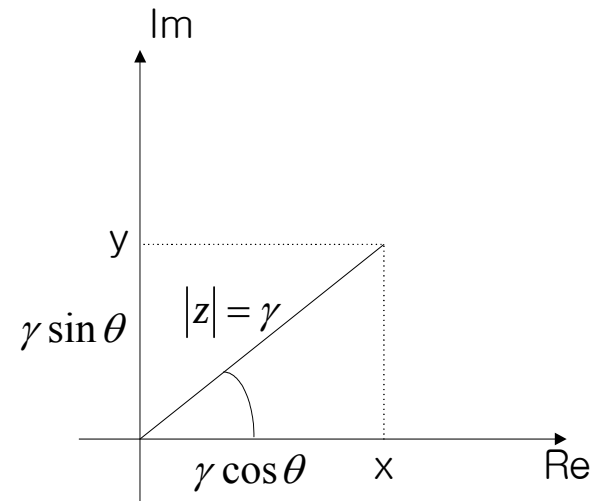


극좌표로 나타내면

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \quad \text{이므로}$$

$$x = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad \text{가 된다.}$$



복소함수란?

예를 들어

$f(z) = z^2 + 3z$ 와 같은 것.

이 때, 복소변수 z 는

$z = x + yi$ 와 같은 복소수

$f(z)$ 를 w 로 나타내면,

$$w = f(z) = z^2 + 3z$$

$\omega = f(z) = z^2 + 3z$ 에 $z = x + yi$ 를 대입하면

$$\omega = (x + yi)^2 + 3(x + yi) = x^2 - y^2 + 3x + i(2xy + 3y) \text{ 가 되므로}$$

$$\omega \text{의 실수부는 } \operatorname{Re}(\omega) = x^2 - y^2 + 3x$$

$$\omega \text{의 허수부는 } \operatorname{Im}(\omega) = 2xy + 3y \text{ 가 된다.}$$

(Re는 Real의 약자, Im는 Imaginary의 약자)

보통, $\operatorname{Re}(\omega) = u$, $\operatorname{Im}(\omega) = v$ 라고 놓으므로 $\omega = u + vi$ 가 된다.

U와 v는 모두 x와 y의 함수이므로, 복수함수는 일반적으로

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ 라고 쓸 수 있다.}$$

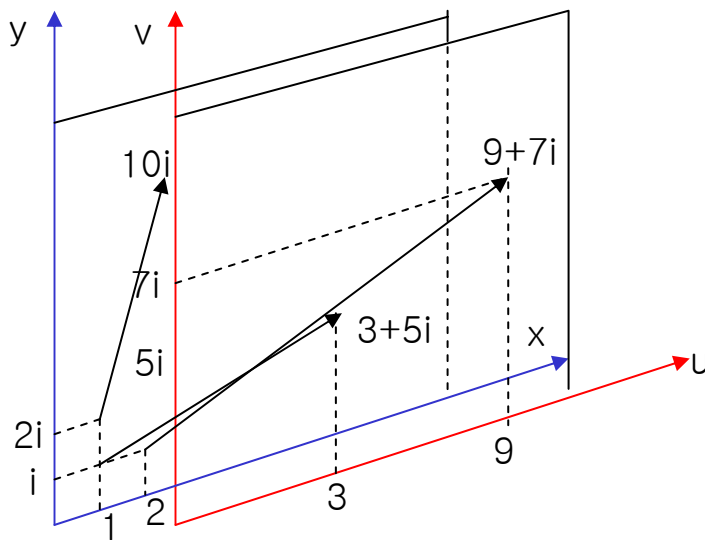
$\omega = f(z) = z^2 + 3z = u(x, y) + iv(x, y)$ 를 그래프로 나타내면

$$z = 1+i \text{ 이면 } \omega = (1+i)^2 + 3(1+i) = 1 + 2i - 1 + 3 + 3i = 3 + 5i$$

$$z = 2+i \text{ 이면 } \omega = (2+i)^2 + 3(2+i) = 4 + 4i - 1 + 6 + 3i = 9 + 7i$$

$$z = 1+2i \text{ 이면 } \omega = (1+2i)^2 + 3(1+2i) = 1 + 4i - 4 + 3 + 6i = 10i$$

이것을 그래프로 나타내면

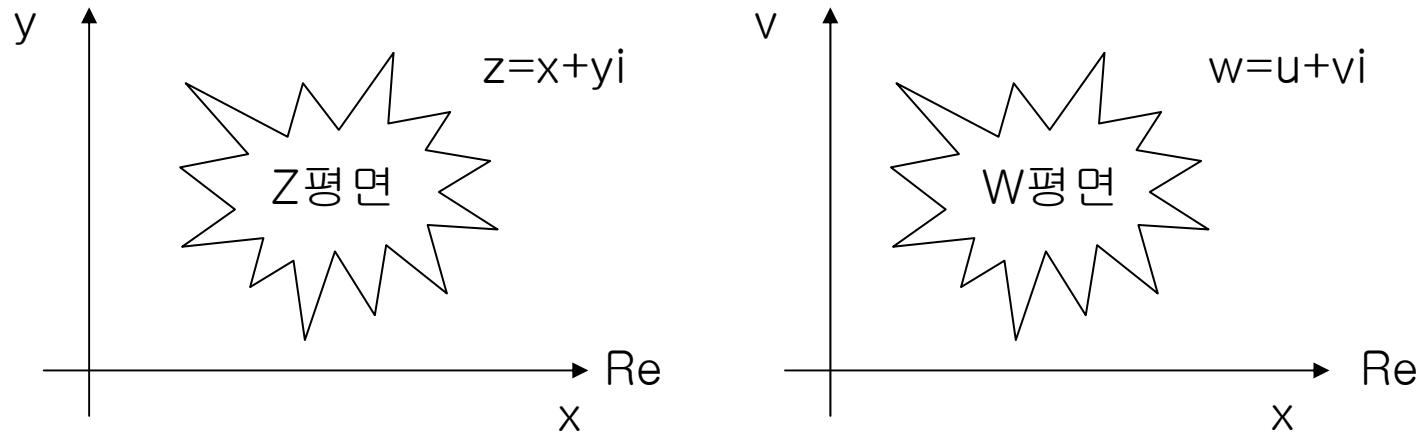


이와 같이 모든 복수수 z 에 대해

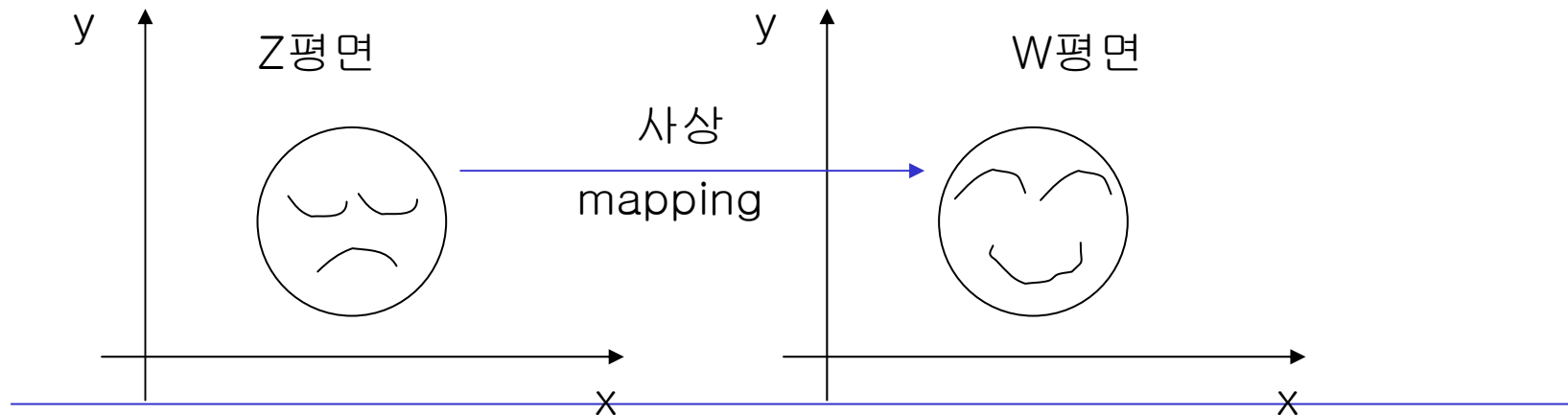
$$\omega = u + vi \text{ 의 값을 구해서}$$

이런 식으로 그려나가면 된다.

복소함수를 그래프로 나타내면 2개의 평면이 필요하다.



따라서 복소함수는 z평면상의 것을 w평면상으로 사상 시키는 역할을 한다.



복소수의 체적과 영역

복소평면의 영역 : 복소수로 편리하게 표현할 수 있다.

원점에 중심을 두고, 반경이 2인 원주상의 점들은 다음과 같이 표현한다.

$$|Z| = 2$$

절대값이 2인 모든 복소수들이다.

점 Z 의 체적은 원점이 중심이고, 반경이 2인 원이다.

그원의 내부는 $|Z| < 2$ 로 기술 되고 $|Z| > 2$ 는 외부이다.

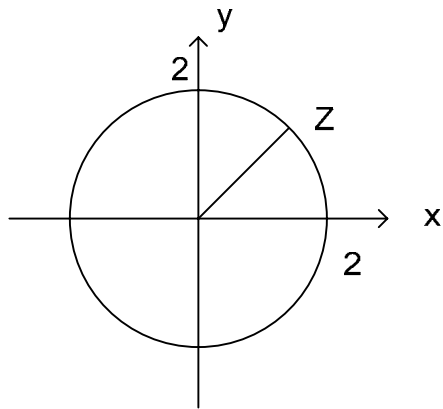


그림1. 중심이 원점이고 반경이 2인 원

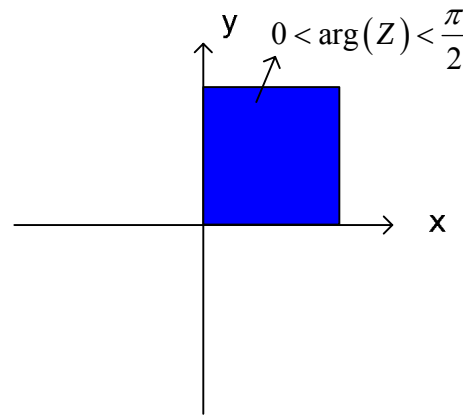


그림2. xy 평면의 1사분면

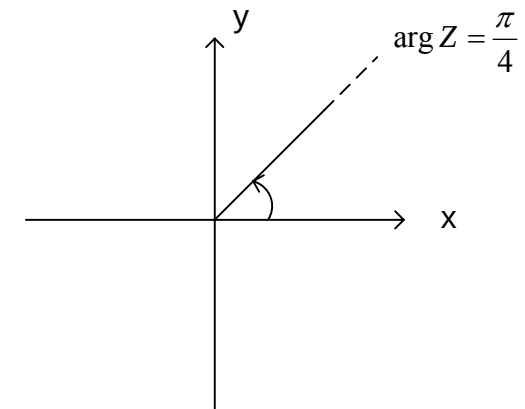


그림3. $\arg(Z) = \frac{\pi}{4}$ 를 만족하는 점의 체적

- 예제1. $|Z - 2| = 3$ 를 만족하는 점의 체적을 그리시오.
먼저 아르강 도표 (argand diagram)를 설명하자.

$Z_1 = 7 + 2i$ 를 아르강 도표에 그리시오.

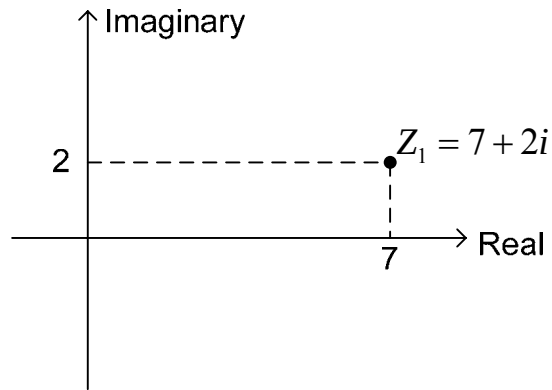


그림3.아르강도표

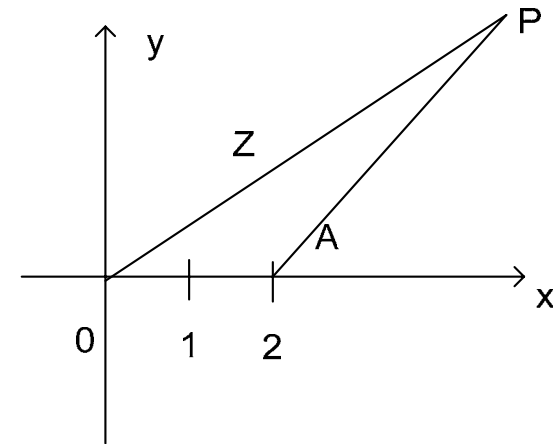


그림4. Z 와 $2+0i$

고정점 2에 기호 A로 표시한다.(그림4)

점 P로 표현된 복소수 Z를 생각하자.

벡터기법에서

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$$

벡터 $\overrightarrow{OP}$: 복소수 Z를 표현한다.

벡터 $\overrightarrow{OA}$: 복소수 2를 표현한다.

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$: 복소수 $Z - 2$ 를 표현한다.

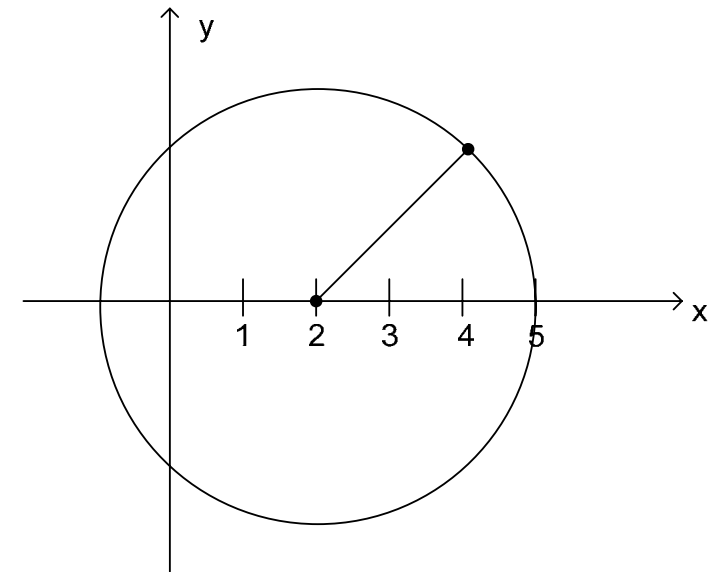


그림5. $|Z - 2| = 3$ 을 만족하는 점의 체적

$|Z - 2|$: A와 P사이의 거리

$|Z - 2| = 3$: P가 A로부터 거리 3인

모든점이 될수 있다는 것을 의미한다.

→ P가 A(2,0)에 원점을 두고

반경이 3인 원주상의 모든점이 될수 있음을
의미한다.

$|Z - 2| < 3$: 원의 내부,

$|Z - 2| > 3$: 원의 외부

$|Z - 2| = 3$ 이 주어지고 $Z = x + jy$ 인 경우

$$|Z - 2| = |(x - 2) + jy| = 3$$

$$\text{즉, } \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = 3$$

$$\text{또는 } (x - 2)^2 + y^2 = 9$$

반경이 3이고

중심이 (2,0)인 원을 표현한다.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

반경이 r 이고 중심이 (a, b) 인
원을 표현한다.

퀴즈 1.

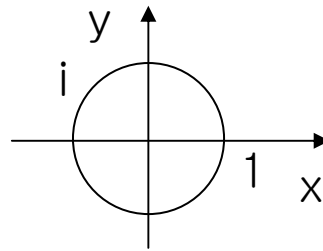
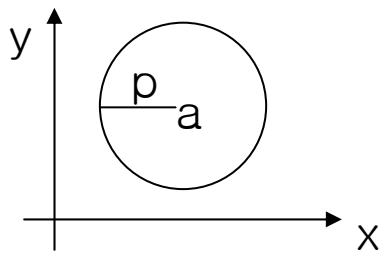
① $|z - a| = \rho$

② $\rho_1 \leq |z - a| \leq \rho_2$

→ 무엇을 나타내는가?

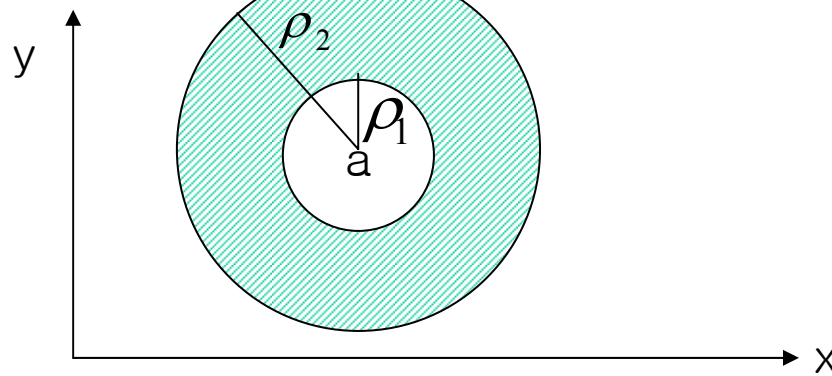
퀴즈 1답.

① $|z - a| = \rho$ 는 z 평면상의 중심 a , 반경 ρ 인 원



참고로 $|z| = 1$ 은
중심이 원점이고 반경이
1인 원

② $\rho_1 \leq |z - a| \leq \rho_2$



x 를 Z 의 실수부(real part), y 를 Z 의 허수부(imaginary part)

$$x = \operatorname{Re} Z, \quad y = \operatorname{Im} Z$$

정의에 의하여 두 복소수의 실수부와 허수부가 같을때 두 복소수는 같다고 한다.

$(0,1)$ 은 허수단위(imaginary unit)라 부르며 아래와 같이 표기한다.

$$(1) \quad i = (0, 1)$$

덧셈, 곱셈 표기 $Z = x + iy$

$(x,y$ 는 실수, i 는 허수 $\sqrt{-1}$)와 같이 실수와 허수로 이루어진 수로 실수를 확장한 가장 넓은 범위의 수이다.

두 복소수 $Z_1=(x_1,y_1)$ 과 $Z_2=(x_2,y_2)$ 의 덧셈은 다음과 같이 정의된다.

$$Z_1=(x_1,y_1) \quad Z_2=(x_2,y_2) \quad \text{로 나타낸다.}$$

$$(2) \quad Z_1 + Z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

곱셈은 다음과 같이 정의된다.

$$(3) \quad Z_1 Z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

그러면 실수 x_1, x_2 에 관하여

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \quad \text{과} \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

따라서 복소수는 실수의 확장이며

$$(4^*) \quad (x, 0) = x$$

유사하게 실수 y 에 대해

$$(1) \quad i = (0, 1)$$

$$(4^{**}) \quad (0, y) = iy$$

이는 (1)과 (4*)에 의해 x 대신 y 를 써서 $iy = (0, 1)(y, 0)$ 이기 때문이다.

$$\text{곱셈식 (3)를 통해} \quad (0, 1)(y, 0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1y) = (0, y)$$

—————→ (4*)식이 된다.

(4**)와 (4*)를 합쳐

$$\text{로 쓴다.} \quad (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$$

실제로 복소수 $Z = (x, y)$ 는 다음과 같이 쓴다.

$$(4) \quad Z = x + iy$$

만일 $x=0$, 즉 $Z=iy$ 이면 순허수(Pure imaginary)라고 부른다.

또한 식 (1)과 (3)로 부터

$$i^2 = ii = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1 \quad \text{이므로}$$

$$(5) \quad i^2 = -1$$

덧셈에 관해서는 식(4)는 아래와 같다. [식(2)참조]

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

곱셈에 대해서는 다음과 같은 간단한 방법을 얻게 된다.

항들을 각각 곱하고 $i^2 = -1$ 을 사용하면 (식 (3)를 참조)

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1x_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

예제 1. 실수부, 허수부, 복소수의 합과 곱

$$Z_1 + Z_2 = (8 + 3i) + (9 - 2i) = 17 + i$$

$$Z_1 Z_2 = (8 + 3i)(9 - 2i) = 72 + 6 + i(16 + 27) = 78 + 11i$$

뺄셈과 나눗셈

뺄셈과 나눗셈은 덧셈과 곱셈의 역 연산으로 정의 된다.

차 $Z = Z_1 - Z_2$ 는 $Z_1 = Z + Z_2$ 를 만족하는 복소수이다.

몫 $Z = \frac{Z_1}{Z_2} (Z_2 \neq 0)$ 은 $Z_1 = Z Z_2$ 를 만족하는 복소수이다.

만약 이 수식의 실부와 허부를 계산하기 위하여 $Z = x + iy$ 를 두면

$$x_1 = x_2 x - y_2 y, \quad y_1 = y_2 x + x_2 y \quad \text{를 얻는다.}$$

$$(7^*) \quad Z = \frac{Z_1}{Z_2} = x + iy, \quad x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

식 (7*)를 얻기위한 실용적인 규칙은 몫 $\frac{Z_1}{Z_2}$ 의 분모 및 분자에 $x_2 - iy_2$ 를 곱하여 정리한다.

$$(7) \quad Z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

예제2. 복소수의 차와 몫

$$Z_1 = 8 + 3i \text{ 이고 } Z_2 = 9 - 2i \text{ 이면 } Z_1 - Z_2 = (8 + 3i) - (9 - 2i) = -1 + 5i$$

그리고

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(8 + 3i)(9 + 2i)}{(9 - 2i)(9 + 2i)} = \frac{66 + 43i}{81 + 4} = \frac{66}{85} + \frac{43}{85}i$$

복소평면

복소평면은 복소수를 평면상의 점으로 표시한다.

두개의 서로 직교하는 좌표축, 즉 실축(real axis)과 수평 x 축과 허축(imaginary axis)인 수직 y 축으로 표시한다.

두 축에서 같은 길이의 단위를 사용한다. (그림 288)

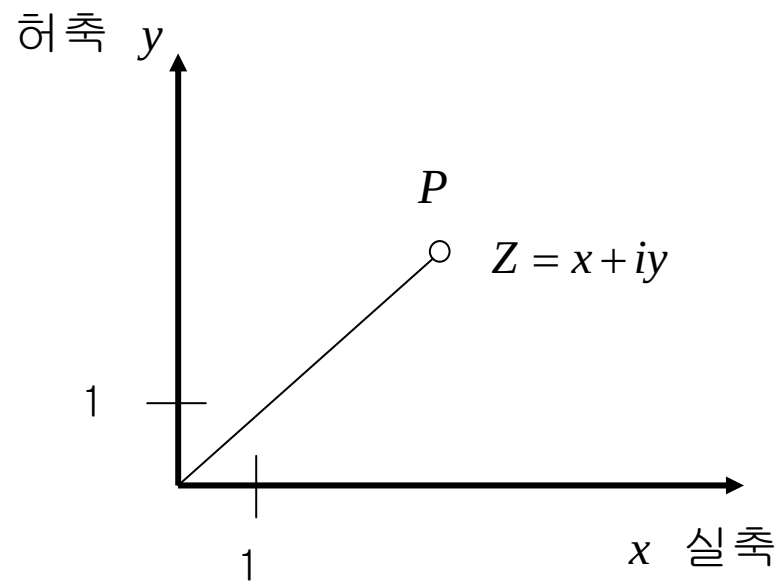


그림315 복소평면

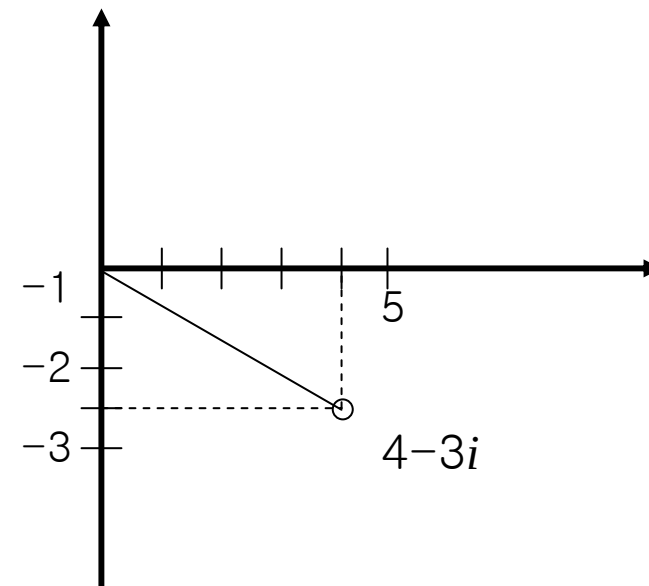


그림316 복소 평면에서의 복소수 $4 - 3i$

이것을 직교좌표계 (Cartesian Coordinate system)이라고 한다.

$Z=(x,y)=x+iy$ 를 좌표 x,y 를 같은 점 P 로 그린다.

복소평면에서의 Z 에 의해 표시된 점 보다는 복소평면에서의 점 Z
라고 한다.

그림317과 그림318에서 덧셈과 뺄셈의 예를 보여준다.

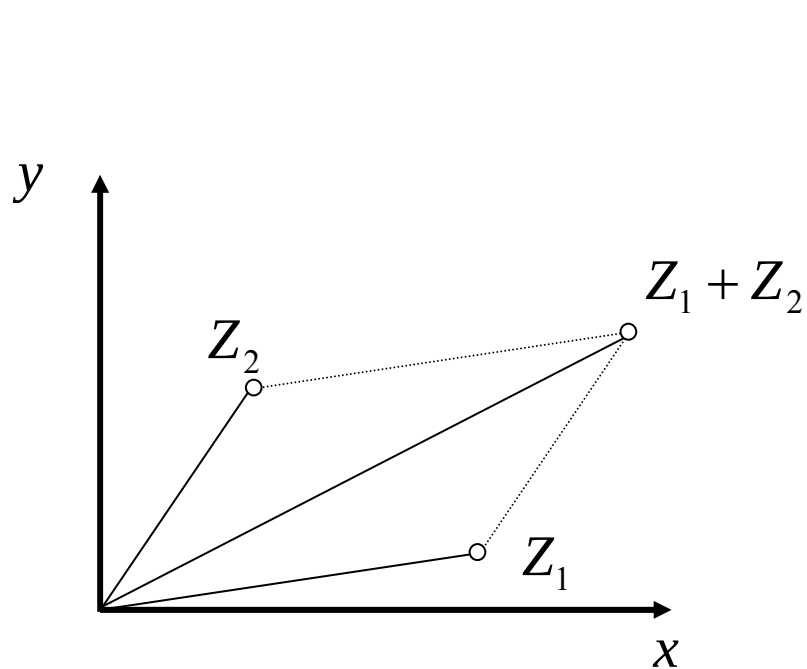


그림317 복소수의 덧셈

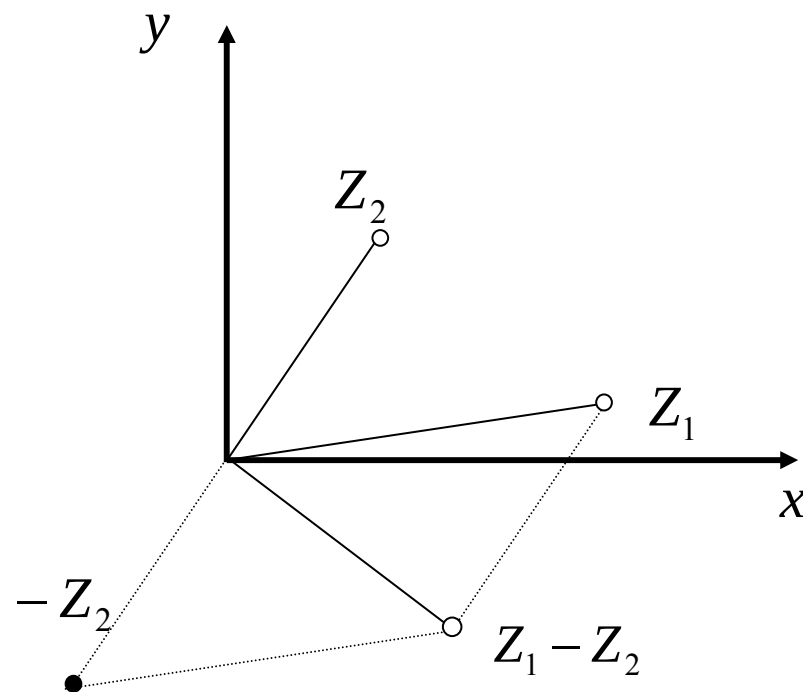


그림 318 복소수의 뺄셈

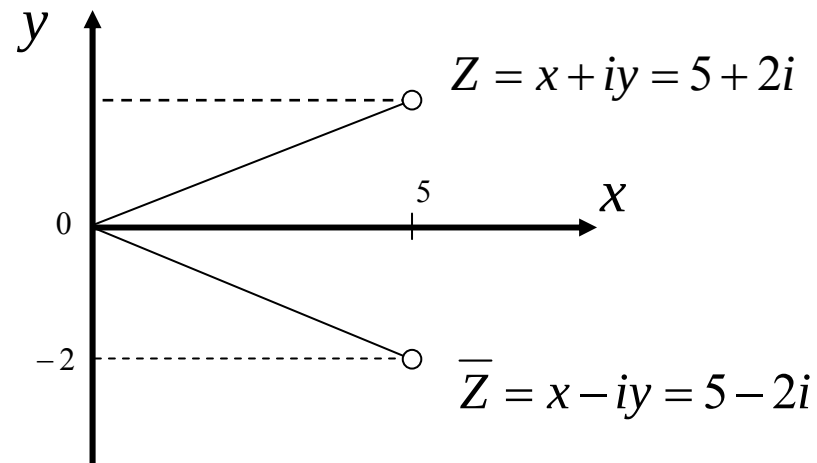
공액복소수(complex conjugate number)

$Z=x+iy$ 의 공액복소수 $\bar{Z}$ 는 아래와 같이 정의 된다.

$$\bar{Z} = x - iy$$

복소평면상에서 실축에 대칭시키면 기하학적으로 얻을 수 있다.

그림 319는 $Z = 5 + 2i$ 와 그 공액 $\bar{Z} = 5 - 2i$ 를 나타낸다.



$$Z = x + iy$$

$$\bar{Z} = x - iy$$

공액복소수는 복소수를 실수로 바꾸어 주는 방법을 제공한다.

즉 $Z\bar{Z} = x^2 + y^2$ 덧셈과 뺄셈으로 부터 $Z + \bar{Z} = 2x, Z - \bar{Z} = 2iy$ 가 되므로 Z 의 실부와 허부를 다음과 같은 중요한 식으로 표시할 수 있다.

$$(8) \quad \operatorname{Re} Z = x = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z}), \quad \operatorname{Im} Z = y = \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z})$$

Z 가 실수이면 $Z = \bar{Z}$ 이고, 식(8)에서 $Z = \bar{Z}$ 이며 그 역도 성립한다.

공액복소수의 곱셈공식을 정리하면

$$(9) \quad \overline{(Z_1 + Z_2)} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2, \quad \overline{(Z_1 - Z_2)} = \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2$$

$$\overline{(Z_1 Z_2)} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2, \quad \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$

예제3. 식(8)과 (9)의 예

$Z_1 = 4 + 3i$, $Z_2 = 2 + 5i$ 라고 하자. 그러면 식(8)에 의해

$$\operatorname{Im} Z_1 = \frac{1}{2i}[(4 + 3i) - (4 - 3i)] = \frac{3i + 3i}{2i} = 3$$

또한(9)의 곱셈공식은 다음에 의해 확인 된다.

$$(\overline{Z_1 Z_2}) \equiv \overline{(4 + 3i)(2 + 5i)} = \overline{-7 + 26i} = -7 - 26i$$

$$\overline{Z_1} \overline{Z_2} \equiv (4 - 3i)(2 - 5i) = -7 - 26i$$

12.2 복소수의 극 형식, 거듭제곱과 근

xy 좌표와 함께 다음에 정의된 극좌표 r, θ 를 사용하여 복소평면의 유용성을 크게 증대시키고 복소수의 성질을 알아본다.

$$(1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

로 정의 되며 $Z=x+iy$ 는 소위 극형식(polar form)

$$(2) \quad Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

를 얻는다. 여기서 r 는 Z 의 절대값, 또는 크기 (modulus)라고 하며 $|Z|$ 로 나타낸다.

따라서 식(3)으로 표기한다.

$$(3) \quad |Z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Z\bar{Z}}$$

기하학적으로 $|z|$ 는 원점에서 점 z 까지의 거리가 된다.(그림320)

유사하게 $|z_1 - z_2|$ 는 z_1 과 z_2 사이의 거리이다. (그림 321)

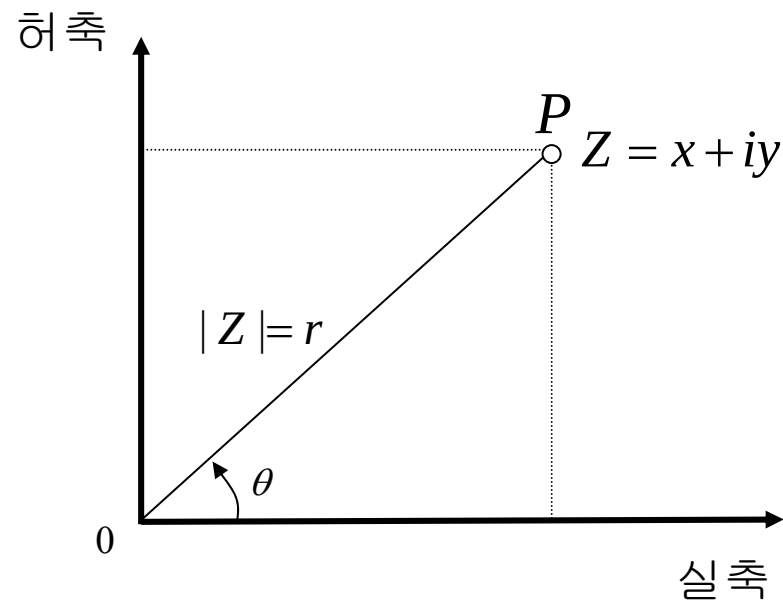


그림320. 복소평면, 복소수의 극형식

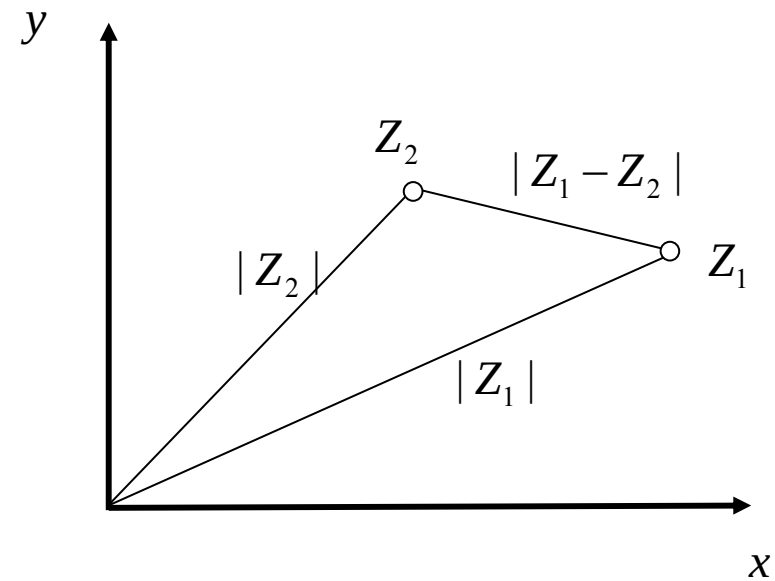


그림321 복소평면에서의 두 점사이의 거리

θ 를 편각(argument)이라고 하고 $\arg Z$ 로 표기한다. 따라서

$$(4) \quad \theta = \arg Z = \arctan \frac{y}{x} \quad (Z \neq 0)$$

그림 320을 참고하시오. 기하학적으로 θ 는 그림320에서 양의 x 축에서 OP까지의 방향각이다. 미적분학에서 처럼 모든각은 라디안(radian)으로 표시되며 반시계 방향이 양의 값을 갖는다.

구간 $-\pi < \theta \leq \pi$ 사이에 있는 θ 의 값을 $Z(\neq 0)$ 의 편각의 주값(principal value)이라고 부르며 $\arg Z$ 로 표기한다.

따라서 $\theta = \arg Z$ 는 정의에 의해

$$-\pi < \arg Z \leq \pi$$

를 만족한다.

예제1. 복소수의 극 형식, 주값

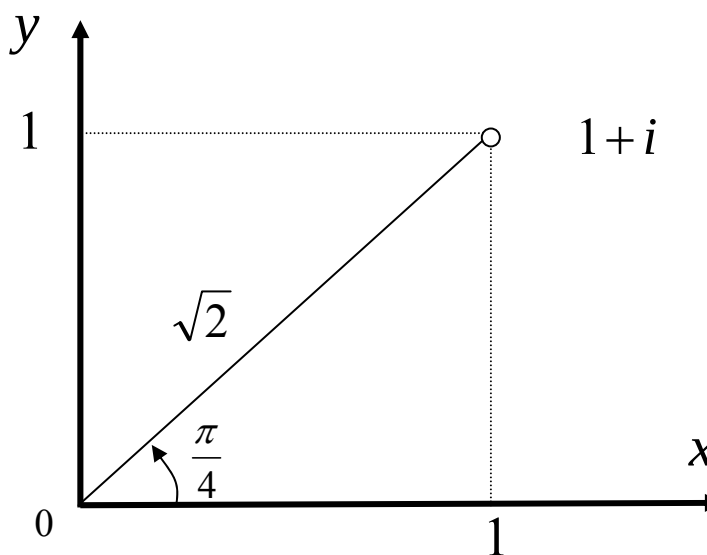
$Z = 1+i$ 를 (그림322참조) 극형식으로 표기하면

$$Z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}) \text{ 이다.}$$

그러므로 $|Z| = \sqrt{2}$, $\text{Arg}Z = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi (n = 0, 1, \dots)$ 이고, 편각의

주값은 $\text{Arg}Z = \frac{\pi}{4}$ 이다.

그림322 예제 1



$$(4) \quad \theta = \arg Z = \arctan \frac{y}{x} \quad (Z \neq 0)$$

유사하게 $Z = 3 + 3\sqrt{3}i = 6(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$, $|Z| = 6$, 그리고

$$\operatorname{Arg} Z = \frac{\pi}{3} \text{ 이다.}$$

주의 : 식(4)를 사용할때 $\tan \theta$ 의 주기가 π 이므로 $Z, -Z$ 의 편각이 똑같이 $\tan \theta$ 을 갖는다. 따라서 Z 가 놓여있는 상한에 주의를 해야한다.

예를 들면 $\theta_1 = \arg(1+i)$ 와 $\theta_2 = \arg(-1-i)$ 에 대해

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2 = 1 \text{ 이다.}$$

삼각형 부등식

임의의 복소수에 대하여 자주 사용하는 중요한 삼각형 부등식 (triangle inequality)을 얻는다.

(5) $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ (그림 323 참조)

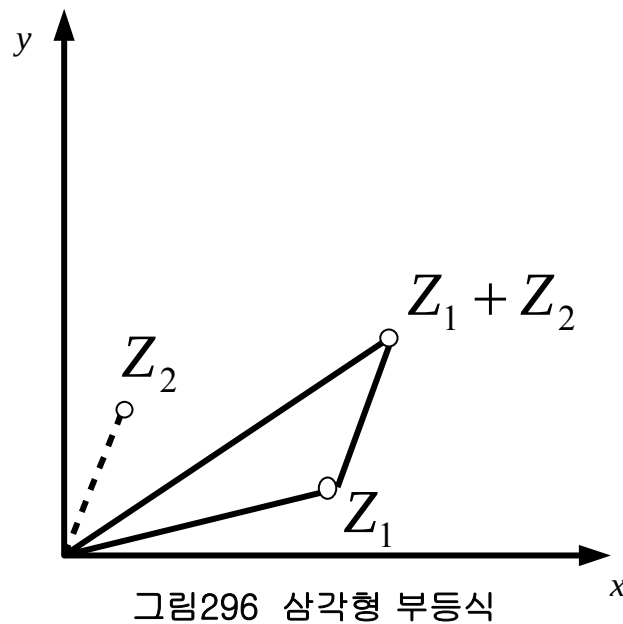


그림296 삼각형 부등식

이부등식은 세 점 $0, Z_1, Z_1 + Z_2$ 가
각 변의 길이가 $|Z_1|, |Z_2|, |Z_1 + Z_2|$ 인
그림 296의 꼭지점이다.

한변의 길이가 다른 두변보다 클
수 없다는 사실에 유의한다.

식 (5)로 부터 귀납법에 의해서 일반화된 삼각형 부등식

$$(6) \quad |Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n| \leq |Z_1| + |Z_2| + \cdots + |Z_n|$$

→ 총합의 절대값은 각항의 절대값의 합보다 작거나 같음을 의미한다.

(5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ 증명하여라 .

$z = a + bi, \quad \omega = c + di$ 라고 하자

$$0 \leq |z + \omega|^2 = (z + \omega)(\overline{z + \omega}) \quad \bullet |z| \geq 0, \quad |z| = 0 \text{의 필요충분조건 } z = 0$$

$$z \overline{z} = |z|^2$$

$$(z + \omega)(\overline{z + \omega}) = z \overline{z} + z \overline{\omega} + \overline{z} \omega + \omega \overline{\omega}$$

$$= |z|^2 + z \overline{\omega} + \overline{z} \omega + |\omega|^2 \quad \overline{\overline{z}} = z$$

$$z \overline{z} = |z|^2$$

$$= |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \overline{\omega}) + |\omega|^2 \quad \operatorname{Re}(\overline{z}) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

$$\leq |z|^2 + 2 |z \overline{\omega}| + |\omega|^2 \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

$$= |z|^2 + 2 |z| |\omega| + |\omega|^2 \quad |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$$

$$= (|z| + |\omega|)^2 \quad \begin{array}{l} |\overline{z}| = |z| \\ |z \omega| = |z| |\omega| \end{array} \quad 58$$

$$\text{즉} \quad 0 \leq |z + \omega|^2 \leq (|z| + |\omega|)^2$$

어떤 복소수의 크기도 음수가 될 수 없으므로 이 부등식에 제곱근을 취하면 삼각부등식이 구해진다.

<응용예>

$z = 3 + 3i$ 일때 그림과 같이 원점에서 점(3,3)으로 연결한 선이 양의 실수축과 $\pi/4$ 사이각을 이룬다.

따라서 $\pi/4$ 는 $3 + 3i$ 의 편각이며, k 가 임의의 정수일때 $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 또한 $3 + 3i$ 의 편각이다.

$$\arg(3 + i) = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \text{는 정수} \right\}$$

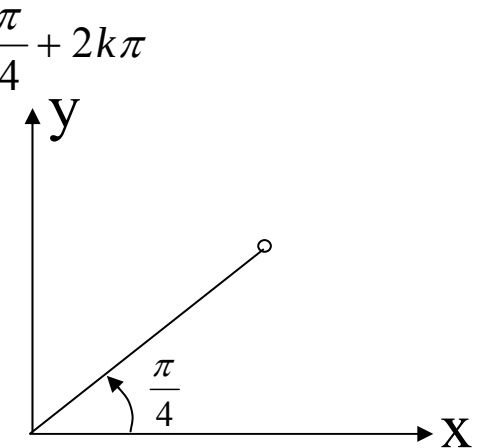


그림 1. 복소수의 편각

예제 2. 삼각형 부등식

$$Z_1 = 1 + i \text{ 이고 } Z_2 = -2 + 3i \text{ 이면}$$

$$|Z_1 + Z_2| = |-1 + 4i| = \sqrt{17} = 4.123 < \sqrt{2} + \sqrt{13} = 5.020$$

극형식에서의 곱셈과 나눗셈

$Z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, 그리고 $Z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ 이라고 하자

<곱셈> 13.1절의 식(3)으로부터 곱은 아래와 같다.

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

여기서 사인과 코사인의 덧셈 정리 [부록 3.1의 식 (6)]을 적용하면

$$(7) \quad Z_1 Z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad \text{를 얻는다.}$$

식 (7)의 양변에 절대값과 편각을 취하면 (8)과 (9)를 얻는다.

$$(8) \quad |Z_1 Z_2| = |Z_1| |Z_2|$$

$$(9) \quad \arg(Z_1 Z_2) = \arg Z_1 + \arg Z_2$$

<나눗셈> 몫 $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ 은 $ZZ_2 = Z_1$ 을 만족하는 Z 이다.

따라서 $|ZZ_2| = |Z||Z_2| = |Z_1|$, $\arg(ZZ_2) = \arg Z + \arg Z_2 = \arg Z_1$
이 된다.

이로부터

$$(10) \quad \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \quad (Z_2 \neq 0)$$

$$(11) \quad \arg \frac{Z_1}{Z_2} = \arg Z_1 - \arg Z_2$$

이 공식 (10)과 (11)을 결합하며

$$(12) \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

을 얻는다.

예제3. 공식(8) ~ (11)의 예

$$|Z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$Z_1 = -2 + 2i, Z_2 = 3i$ 라고 하면

$$Z_1 Z_2 = -6 - 6i, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)i \quad \text{이다. 따라서}$$

$$|Z_1 Z_2| = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{8} = |Z_1| |Z_2|, \quad \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

편각에 대해서는 $\arg Z_1 = \frac{3\pi}{4}, \arg Z_2 = \frac{\pi}{2}$

예제4. 정수 거듭제곱, De Moivre 공식

식(8)과 (9)와 $Z_1 = Z_2 = Z$ 로 부터 귀납법에 의해 $n = 0, 1, 2, \dots$ 에 대해 다음을 얻는다.

$$(13) \quad Z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

유사하게 $n = 0, -1, -2, \dots$ 에 대해, 식(12)에 $Z_1 = 1$ 과 $Z_2 = Z^n$ 을 대입하면 식(13)이 얻어진다. $|Z| = r = 1$ 에 대하여 공식(13)은 다음의 De Moivre 공식이 된다.

$$(13^*) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

이 공식은 $\cos n\theta$ 와 $\sin n\theta$ 를 $\cos \theta$ 와 $\sin \theta$ 의 거듭제곱의 형태로 나타낸다.

$n=2$ 일 때 좌변은

$\cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta$ 가 되는데 식 (13*)의 양변의 실부와 허수부를 취하면 다음의 공식을 얻는다.

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$$

13.3 도함수, 해석 함수 (Derivative, Analytic Function)

원과 원판, 반 평면 (Circle and Disk, Half Plane) 단위원 (unit circle)

$|Z|=1$ (그림327) 은 13.2절에서 소개 되었음

그림 327은반지름이 ρ ,중심이 a 인 원이다.

그것의 방정식은

$$|Z - a| = \rho$$

중심 a 로 부터 거리가 $|Z - a|$ 인 즉 ρ 인 모든 Z 의 집합이다.

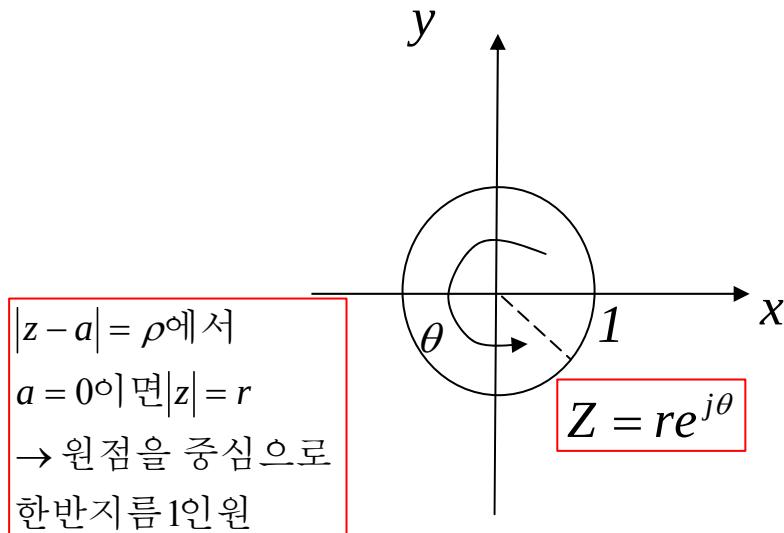


그림327 단위원

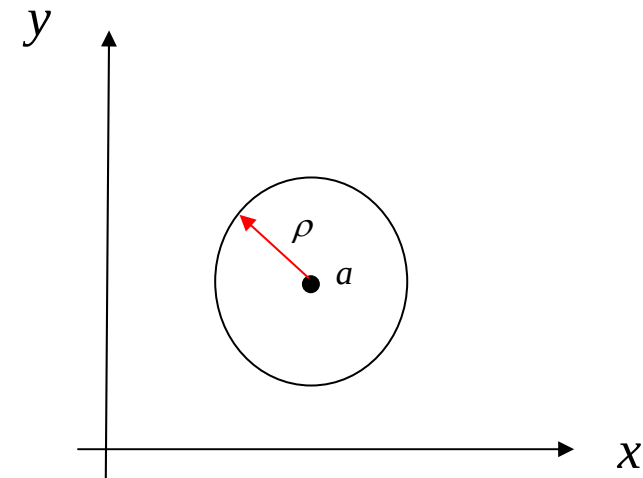


그림328 복소평면에서의 원

그것의 내부 $|z-a| < \rho$ 열린 원판(open circular disk)

그원과 내부를 합친 $|z-a| \leq \rho$ 닫힌 원판 (closed circular disk)

$|z-a| > \rho$: 원의 외부

$|z-a| < \rho$ 인 열린 원판을 a 의 한 근방(neighborhood)이라고 한다.

a 는 무한히 많은 그러한 근방을 가지며 그들 각각은 $\rho > 0$ 의 값에 대응한다. 그리고 a 는 정의에 의해 모든 근방에 포함된다.

그림 302는 $\rho_1 < |z-a| < \rho_2$ 인 열린 환형(open annulus)이라고 한다.

반면에 $\rho_1 \leq |z-a| \leq \rho_2$ 닫힌 환형 (closed annulus)

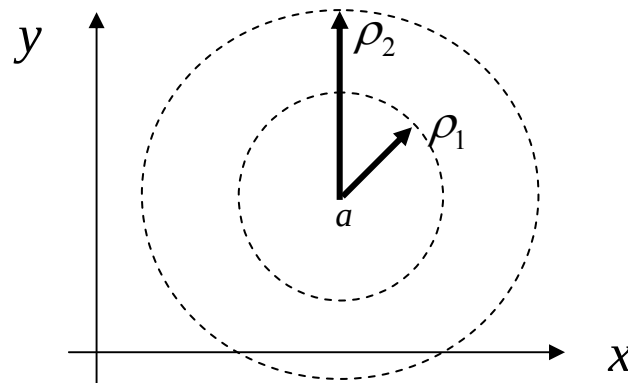
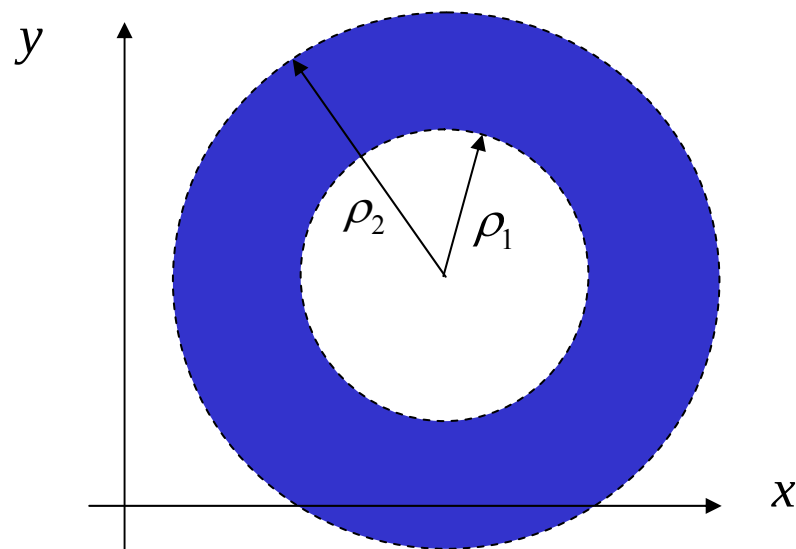


그림329 복소평면에서의 환형

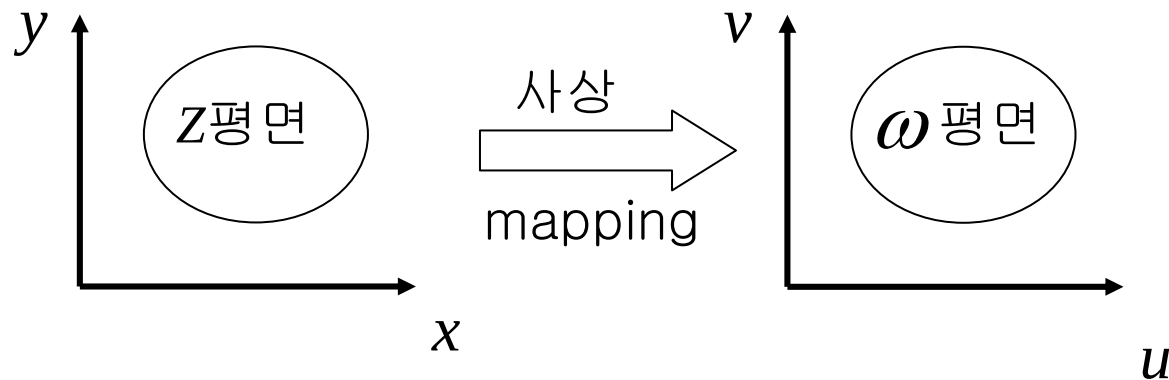
-
- 그림 329에 보인 영역외에도
 - (1) 상부 반평면(upper half plane) : $z = x + iy$ 에서 $y > 0$ 인 영역
 - (2) 하부 반평면(lower half plane) : $z = x + iy$ 에서 $y < 0$ 인 영역
 - (3) 실수축(real axis) : $z = x + iy$ 에서 $y = 0$ 인 영역(즉, 직선)



복소함수 : 복소수를 변수로 갖는 함수

$$\omega = f(z) = z^3 + 3z = u(x, y) + iu(x, y)$$

복소함수의 그래프를 그리려면 2장의 평면이 필요하다.



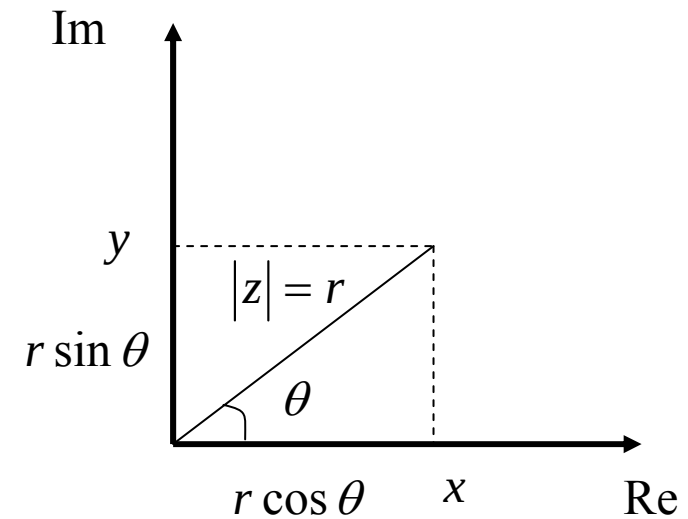
이유 : 변수인 복소수 자신이 2개의 변수 x, y 를 가진다.
또한 복소함수도 u, v 의 2개의 변수를 가지므로 한 평면상에 그릴 수 없다.

복소수는 복소평면에 한점으로 나타낼 수 있으므로
극 좌표로 나타내면 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 이므로

$$Z = x + yi = r \cos \theta + ir \sin \theta$$

or

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$



복소함수란?

$f(z) = z^2 + 3z$ 에서 복소변수 $z = x + yi$ 로 표현되는 복소수이다.

$f(z)$ 를 보통 ω 로 나타낸다.

$\omega = f(z) = z^2 + 3z$ 에 $z = x + yi$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}\omega &= (x + yi)^2 + 3(x + yi) \\ &= x^2 - y^2 + 3x + i(2xy + 3y)\end{aligned}$$

ω 의 실수부는 $\operatorname{Re}(\omega) = x^2 - y^2 + 3x$

ω 의 허수부는 $\operatorname{Im}(\omega) = 2xy + 3y$

보통 $\operatorname{Re}(\omega) = u$, $\operatorname{Im}(\omega) = v$ 라고 놓으면 $\omega = u + vi$ 가 된다.

u 와 v 는 모두 x 와 y 의 함수이므로 복소함수는 일반적으로

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$\omega = f(z) = z^2 + 3z = u(x, y) + iv(x, y)$ 를 그래프로 나타내면

$z = 1 + 3i$ 이면

$$\begin{aligned}\omega &= (1 + 3i)^2 + 3(1 + 3i) \\ &= 1 + 6i - 9 + 3 + 9i \\ &= -5 + 15i\end{aligned}$$

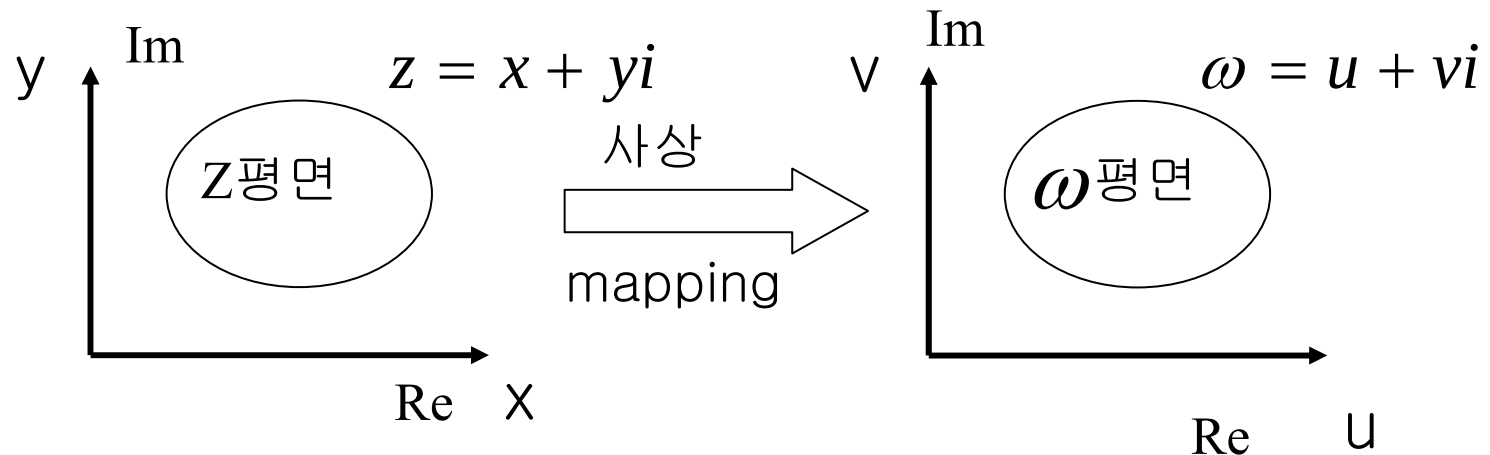
$$z = 2 + i \text{ 이면}$$

$$\begin{aligned}\omega &= (2+i)^2 + 3(2+i) \\ &= 4 + 4i - 1 - 6 + 3i \\ &= 9 + 7i\end{aligned}$$

$$z = 1 + 2i \text{ 이면}$$

$$\begin{aligned}\omega &= (1+2i)^2 + 3(1+i) \\ &= 1 + 4i - 4 + 3 + 6i \\ &= 10i\end{aligned}$$

모든 복소수 z 에 대해 $\omega = u + vi$ 의 값을 구해서 그래프를 그리면 2개의 평면이 필요하다.



복소함수는 $\mathbf{Z}$ 평면상에서 ω 평면상으로 사상(mapping)시키는 역할을 한다.

임의의 복소수 z 에 대해 $|z|$ 는 복소평면에서 z 와 원점을 연결하는 선분의 길이 (즉, 원점과 z 사이의 거리)이다.

ω 가 다른 복소수이라면 $|z - \omega|$ 는 복소평면에서 z 와 ω 사이의 거리이다. (그림 1,2 참고)

기하학적으로 쉽게 설명하면 $z = a + bi, \omega = c + di$ 이면

$$z - \omega = (a - c) + (b - d)i \text{ 이다.}$$

$$|z - \omega| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

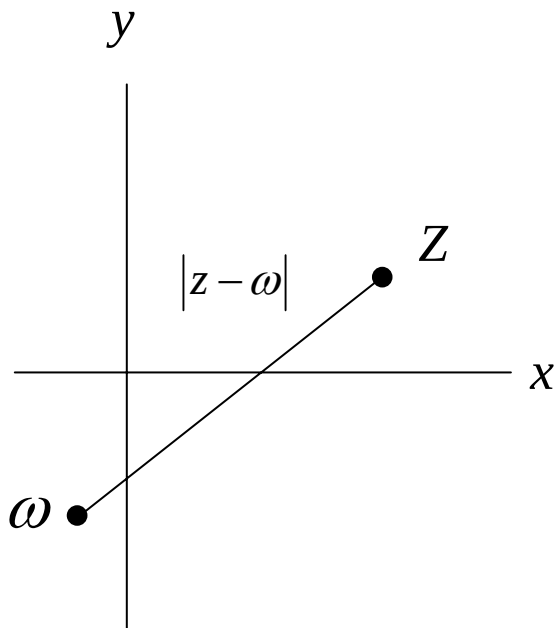


그림1. $|z - \omega|$ 은 z 와 ω 사이의 거리

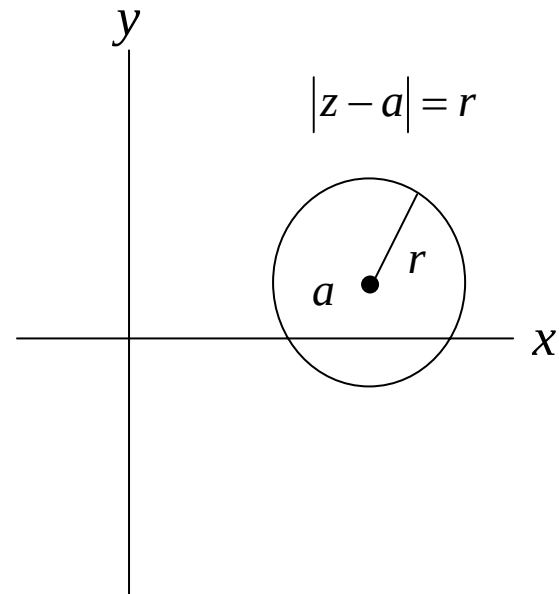


그림2. a 를 중심으로 한
반지름이 r 인 원

복소함수

S 를 복소수의 집합이라고 하자. 이때 S 위에서 정의된 함수란 S 의 모든 z 에게 z 에서의 f 값이라고 하는 복소수 ω 를 지정해주는 규칙을 의미한다.

$$\omega = f(z) , \quad z = x + iy$$

여기서 z 는 복소수로서 S 내에서 변한다.

복소함수는 복소수를 변수로 갖는 함수이다.

집합 S 를 f 의 정의역(domain of definition)

예 : $\omega = f(z) = z^3 + z$ 는 모든 z 에 대해 정의되는 복소함수이다.

ω 의 정의역 S 는 전체 복소 평면이다.

함수 f 의 모든값의 집합을 f 의 치역(range of f)이라고 한다.

ω 는 복소수이므로 u 와 v 를 각각 ω 의 실부와 허부라고 하며
 $\omega=u+iv$ 라고 쓴다.

이때 ω 는 $z=x+iy$ 에 의존하므로 u 는 x 와 y 의 실함수가 되고 v 역시 마찬가지 이다.

복소함수 $f(z)$ 가 두개의 실변수 x 와 y 에 의존하는 한쌍의 실함수
 $u(x,y)$ 및 $v(x,y)$ 와 동등하다.

예제 1. 복소변수의 함수

$\omega=f(z)=z^2+3z$, u 와 v 를 구하고 $z=1+3i$ 에서 f 의 값을 구하라.

(풀이) $u = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 3x$, $v = 2xy + 3y$ 이다. 또한

$$f(1+3i) = (1+3i)^2 + 3(1+3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i$$

이로부터 $u(1,3) = -5$ 이고 $v(1,3) = 15$ 이다.

예제 2. 복소변수의 함수

$\omega = f(z) = 2iz + 6\bar{z}$ 라고 하고, $z = \frac{1}{2} + 4i$ 에서 u 와 v 및 f 의 값을 구해라.

(풀이) $f(z) = 2i(x + iy) + 6(x - iy)$ 에서

$$u(x, y) = 6x - 2y, \quad v(x, y) = 2x - 6y$$

$$\begin{aligned} \text{또한 } f\left(\frac{1}{2} + 4i\right) &= 2i\left(\frac{1}{2} + 4i\right) + 6\left(\frac{1}{2} - 4i\right) \\ &= i - 8 + 3 - 24i = -5 - 23i \end{aligned}$$

극한, 연속성

어떤 함수 $f(z)$ 가 z_0 의 근방(z_0 자신을 제외해도 무방하다.)에서 정의되고 z_0 에 근접한 모든 z 에 대해 f 의 값이 l 에 근접하면 모든 양의 실수 ε 에 대해 양의 실수 δ 가 존재하여 원판 $|z - z_0| < \delta$ (그림330)에 있는 모든 $z \neq z_0$ 가

$$(1) \quad |f(z) - l| < \varepsilon$$

을 만족할 때, 함수 $f(z)$ 는 z 가 z_0 에 접근할 때 극한값 l 를 갖는다고 말하고

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$$

와 같이 표시한다.

이 정의는 미·적분학에서와 유사하지만, 큰 차이가 있다.

실수의 경우에는 실축을 따라 x 가 x_0 에 수렴한다.

여기에서는 정의에 의해 z 는 복소평면에서 임의의 방향으로
부터 z_0 에 접근한다.

극한이 존재하면 그 극한은 유일하다.

만약 함수 $f(z_0)$ 가 정의되고

$$(3) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

를 만족하면 함수 $f(z)$ 는 $Z = Z_0$ 에 연속(continuous)이라고 말한다.

→ 극한의 정의에 의해 $f(z)$ 가 Z_0 의 어떤 근방에 정의됨을 의미한다.

함수 $f(z)$ 가 한 정의역의 각 점에서 연속일때 $f(z)$ 는 그 정의역에서 연속이라고 한다.

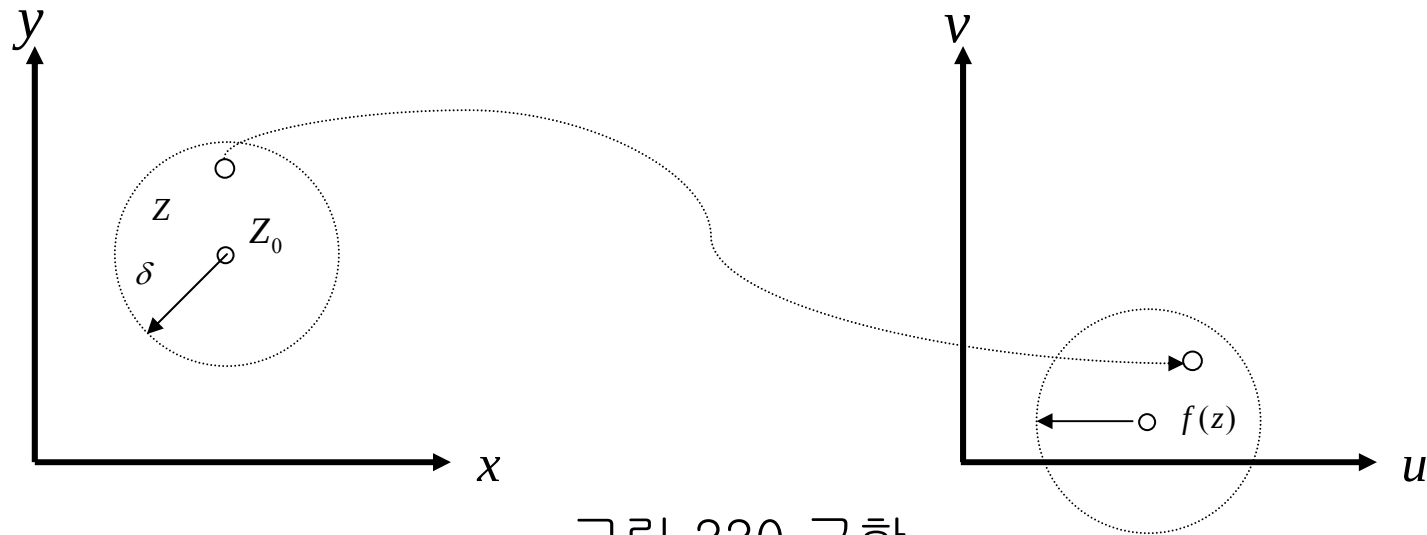


그림 330 극한

도함수

점 z_0 에서 복소함수 f 의 도함수는 다음 극한이 존재할 때

$$(4) \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

로 정의되며, $f'(z)$ 로 표시한다. 이때 함수 f 는 z_0 에서 미분 가능하다고 말한다.

여기서 $\Delta z = z - z_0$ 라고 놓으면 $z = z_0 + \Delta z$ 이므로 다음식을 얻는다.

$$(4') \quad f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

극한의 정의에 의하면 $f(Z)$ 가 z_0 근방에서 정의되어 지며 또한 (4') 에서 z 는 복소평면에서 임의의 방향으로 부터 z_0 에 접근할 수 있다.

따라서 z_0 에서 미분가능하다는 것은 z 가 어떤 경로를 따라 z_0 에 접근하더라도 식 (4') 의 몫은 항상 어떤값에 수렴하며, 또 그 값이 접근경로에 무관하게 모두 동일하다는 것을 의미한다.

예제3. 미분가능성, 도함수 _____

함수 $f(z) = z^2$ 은 모든 z 에 대해 미분가능하고, 도함수 $f'(z) = 2z$ 가 된다. 그 이유는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z \end{aligned}$$

미분법칙은 실수의 미적분에서와 똑같다.

$$\begin{aligned} (cf)' &= cf', & (f + g)' &= f' + g' \\ (fg)' &= f'g + fg' & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

예제4. $\bar{z}$ 의 미분 불가능성

어떤 점에서든 도함수를 갖지 않는 간단한 함수가 많이 존재한다. 예를 들면 $f(z) = \bar{z} = x - iy$ 가 그러한 함수이다.

실제로 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ 로 놓으면

$$(5) \quad \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

가 된다. 여기서 $\Delta y = 0$ 이면 이 값은 1이고 $\Delta x = 0$ 이면 -1이 된다.

따라서 식(5)는 그림 331의 경로 I를 따라가면 +1에 수렴한다.

그러나 경로 II를 따라가면 -1 에 수렴한다. 그러므로 정의에 의해서 $\Delta z \rightarrow 0$ 일때 식 (5)의 극한은 어떤 z 에서도 존재하지 않는다.

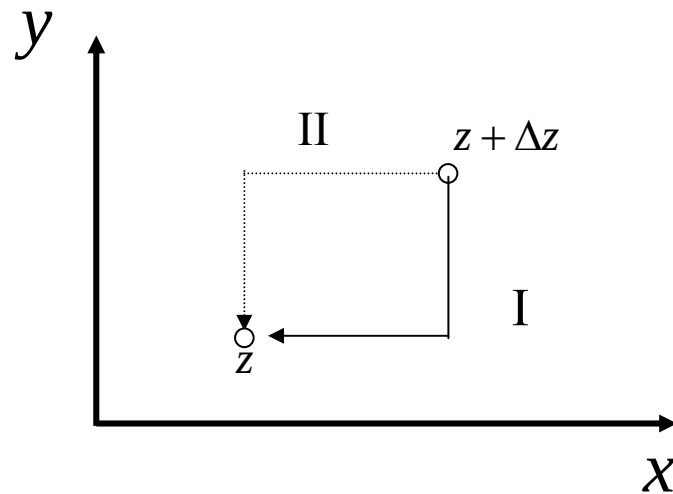


그림 331. 식(5)에서의 경로

해석 함수

어떤 정의역에서 미분가능해서 복소 미적분 할 수 있는 함수들이 있다.

→ 복소 해석에서 주된 관심 대상이다.

※정의[해석성]

함수 $f(z)$ 가 정의역 D 의 모든 점에서 정의되고 미분가능 할 때 $f(z)$ 를 D 에서 해석적(analytic)이라고 한다.

한편 $f(z)$ 가 $z_0 \in D$ 근방에서 해석적일때 $f(z)$ 를 점 $z = z_0$ 에서 해석적이라고 부른다.

또한 해석함수는 어떤 정의역에서 해석적인 함수를 의미한다.

일반적으로 함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 가 해석함수이면

① $c_1 f(z) + c_2 g(z)$ (c_1, c_2 는 상수)

② $f(z)g(z)$

③ $\frac{f(z)}{g(z)}$ (단 $g(z)=0$ 인 점에서는 비해석적이다.)

는 모두 해석함수로 된다.